

Reg. No. :

Code No. : 20594 B Sub. Code : SSMA 4A

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Fourth Semester

Mathematics

Skill Based Subject — TRIGONOMETRY, LAPLACE
TRANSFORMS AND FOURIER SERIES

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. $1^0 =$ _____ ரேடியன்ஸ்

(அ) π

(ஆ) $\frac{\pi}{180}$

(இ) $\frac{\pi}{90}$

(ஈ) 2π

$1^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ radians.

(a) π (b) $\frac{\pi}{180}$

(c) $\frac{\pi}{90}$ (d) 2π

2. $\sinh^{-1} x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) $\log_e(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (ஆ) $\pm \log_e(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(இ) $\log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (ஈ) $\pm \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$\sinh^{-1} x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $\log_e(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (b) $\pm \log_e(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(c) $\log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (d) $\pm \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$

3. θ என்பது ரேடியனில் இருந்தால், $\sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) $\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$ (ஆ) $1 + \theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} - \dots$

(இ) $1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} + \dots$ (ஈ) $\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$

When θ is expressed in radians, $\sin \theta =$ _____.

(a) $\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$ (b) $1 + \theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} - \dots$

(c) $1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} + \dots$ (d) $\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$

4. $\tanh x =$ _____.

(A) $\tan x$ (B) $\tan(ix)$
(C) $i \tan(ix)$ (D) $-i \tan(ix)$

$\tanh x =$ _____.

(a) $\tan x$ (b) $\tan(ix)$
(c) $i \tan(ix)$ (d) $-i \tan(ix)$

5. $L(e^{2x}) =$ _____.

(A) $\frac{1}{s+2}$ (B) $\frac{1}{s-2}$

(C) $\frac{1}{s}$ (D) 1

$L(e^{2x}) =$ _____.

(a) $\frac{1}{s+2}$ (b) $\frac{1}{s-2}$

(c) $\frac{1}{s}$ (d) 1

6. $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ ன் மதிப்பு

(அ) 1

(ஆ) 0

(இ) x

(ஈ) $\frac{1}{x}$

Value of $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ is

(a) 1

(b) 0

(c) x

(d) $\frac{1}{x}$

7. $L(\sinh ax)$ ன் மதிப்பு

(அ) $\frac{a}{s^2}$

(ஆ) $\frac{a}{(s+a)^2}$

(இ) $\frac{a}{s^2 - a^2}$

(ஈ) $\frac{a}{s^2 + a^2}$

Value of $L(\sinh ax)$ is

(a) $\frac{a}{s^2}$

(b) $\frac{a}{(s+a)^2}$

(c) $\frac{a}{s^2 - a^2}$

(d) $\frac{a}{s^2 + a^2}$

8. $L^{-1}\left(\frac{s}{a^2s^2+b^2}\right)$ ன் மதிப்பு

(அ) $a \cos bx$ (ஆ) $\frac{1}{a} \cos bx$

(இ) $a^2 \cos\left(\frac{bx}{a}\right)$ (ஈ) $\frac{1}{a^2} \cos\left(\frac{bx}{a}\right)$

Value of $L^{-1}\left(\frac{s}{a^2s^2+b^2}\right)$ is

(a) $a \cos bx$ (b) $\frac{1}{a} \cos bx$

(c) $a^2 \cos\left(\frac{bx}{a}\right)$ (d) $\frac{1}{a^2} \cos\left(\frac{bx}{a}\right)$

9. $f(x)$ ஒரு இரட்டை சார்பாக இருக்க $f(-x) =$ _____.

(அ) $f(x)$ (ஆ) $-f(x)$

(இ) $f(x^2)$ (ஈ) $-f(x^2)$

$f(x)$ is an even function of $f(-x) =$ _____.

(a) $f(x)$ (b) $-f(x)$

(c) $f(x^2)$ (d) $-f(x^2)$

10. $(-\pi, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் பூரியர் கெழு $a_n =$ _____.

(அ) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ (ஆ) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$

(இ) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$ (ஈ) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$

In the interval $(-\pi, \pi)$, the Fourier Co-efficient $a_n =$ _____.

(a) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ (b) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$

(c) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$ (d) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$

PART B — $(5 \times 5 = 25 \text{ marks})$

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $\cos n\theta = \cos^n \theta - nC_2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots$ என நிரூபி.

Prove that

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - nC_2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots$$

Or

(ஆ) $2^5 \cos^6 \theta = \cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10$ என நிரூபி.

Prove that

$$2^5 \cos^6 \theta = \cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10 .$$

12. (அ) $\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = \cosh 2x + \sinh 2x$ என நிரூபி.

Prove that $\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = \cosh 2x + \sinh 2x .$

Or

(ஆ) $\cosh u = \sec \theta$ எனில் $u = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ என நிரூபி.

If $\cosh u = \sec \theta$, prove that

$$u = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

13. (அ) $L(t^2 + \cos 2t \cos t + \sin^2 t)$ காண்க.

Find $L(t^2 + \cos 2t \cos t + \sin^2 t)$.

Or

(ஆ) $L^{-1}\left[\log\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\right]$ காண்க.

Find $L^{-1}\left[\log\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\right]$.

14. (அ) லாப்லாஸ் மாற்றியைப் பயன்படுத்தி
 $y' + 3y = e^{-2x}$, $y(0) = 4$ -ஐ தீர்க்க.

Using Laplace transform, solve $y' + 3y = e^{-2x}$,
given $y(0) = 4$.

Or

(ஆ) $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]$ காண்க.

Find $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]$.

15. (அ) $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = k$ என்ற
சார்புக்கு sine தொடரை காண்க.

Find the sine series for the function $f(x) = k$,
 $0 < x < \pi$.

Or

- (ஆ) $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = \pi - x$ என்ற
சார்புக்கு cosine தொடரைக் காண்க.

Find the cosine series for the function
 $f(x) = \pi - x$ in the interval $(0, \pi)$.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ)

$$\cos 8\theta = 128 \cos^8 \theta - 256 \cos^6 \theta + 160 \cos^4 \theta - 32 \cos^2 \theta + 1$$

என நிரூபி.

Prove that

$$\cos 8\theta = 128 \cos^8 \theta - 256 \cos^6 \theta + 160 \cos^4 \theta - 32 \cos^2 \theta + 1.$$

Or

(ஆ) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனில்

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} [\cos n\theta + nC_1 \cos(n-2)\theta + nC_2 \cos(n-4)\theta + \dots]$$

என நிரூபி.

When $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} [\cos n\theta + nC_1 \cos(n-2)\theta + nC_2 \cos(n-4)\theta + \dots]$$

Prove.

17. (அ) $\text{Log}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right) = \log\left(\frac{\text{coec}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}\right) + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$

என நிரூபி.

Prove that

$$\text{Log}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right) = \log\left(\frac{\text{coec}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}\right) + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right).$$

Or

(ஆ) $1 + \cos\theta \cos\theta + \cos^2\theta \cos 2\theta + \cos^3\theta \cos 3\theta + \dots\infty$
என்ற முடிவுறா தொடரியின் கூட்டுத் தொகையை காண்க.

Find the sum to infinity the series

$$1 + \cos\theta \cos\theta + \cos^2\theta \cos 2\theta + \cos^3\theta \cos 3\theta + \dots\infty.$$

18. (அ) (i) $L(f''(x)) = s^2 L(f(x)) - sf(0) - f'(0)$ என நிறுவுக.

(ii) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2}\right)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) Prove that

$$L(f''(x)) = s^2 L(f(x)) - sf(0) - f'(0).$$

(ii) Find $L^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2}\right)$.

Or

(ஆ) $L^{-1}\left(\frac{1+2s}{(s+2)^2(s-1)^2}\right)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

Find the value of $L^{-1}\left(\frac{1+2s}{(s+2)^2(s-1)^2}\right)$.

19. (அ) லாப்லாஸின் மாற்றத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க :

$$y''+4y'+13y = 2e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Solve by using Laplace transform :

$$y''+4y'+13y = 2e^{-x}, \quad \text{given } y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Or

(ஆ) லாப்லாஸின் மாற்றத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க :

$$\frac{dx}{dt} + y = \sin t, \quad \frac{dy}{dt} + x = \cos t \quad \text{given } x(0) = 2, \\ y(0) = 0.$$

Solve by using Laplace transform :

$$\frac{dx}{dt} + y = \sin t, \quad \frac{dy}{dt} + x = \cos t \quad \text{given } x(0) = 2, \\ y(0) = 0.$$

20. (அ) $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில்

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \right] \quad \text{எனக் காட்டு.}$$

இதிலிருந்து $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}$ என வருவி.

Show that $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \right]$ in

$-\pi < x < \pi$. Deduce that

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Or

(ஆ) $(-\pi, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = x$ என்ற சார்பின் பூரியர் விரிவைக் காண்க.

Find the Fourier Expansion $f(x) = x$ in the interval $(-\pi, \pi)$.
